PROJET MA201
Résolution d'un problème d'électrostatique*

François LORET†

1 Introduction

On place q corps conducteurs $(C_i)_{1\leq i\leq q}$ dans une enceinte conductrice C_0. Chaque conducteur est au potentiel V_i, et l'enceinte est supposée être au potentiel nul, soit $V_0 = 0$.

Question 1 : En l'abscence de charges autres que surfaciques, montrer que pour connaître le potentiel $V(M)$ en tout point M intérieur à l'enceinte et extérieur aux conducteurs, on doit résoudre :

$$\Delta V = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{1}$$

$$V = V_i \quad \text{sur } \partial C_i\,,\ i = 0..q\,, \tag{2}$$

où $\Omega = \overset{\circ}{C_0} \setminus \bigcup_{i=1..q} C_i$ et ∂C_i est le bord du $i^{\text{ème}}$ conducteur.

Dans la suite du projet, on prend $q = 2$, et l'on va procéder à l'étude numérique du condensateur bidimensionnel suivant :

- C_0 est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 2.
  $V_0 = 0$.

- C_1 est un rectangle de sommets $(-1,-0.8)$, $(-1,1.2)$, $(-0.8,-0.8)$ et $(-0.8,1.2)$.
  $V_1 = -1$.

- C_2 est le rectangle symétrique de C_1 par rapport à O.
  $V_2 = 1$.

---

* **Reprise d'un sujet de P. Ciarlet.**

† Laboratoire de Simulation et Modélisation des phénomènes de Propagation, S.M.P., loret@ensta.fr, bureau 3053).

2 Approximation

On supposera dans la suite que la solution V de (1)–(2) appartient à $H^1(\Omega)$.

Question 2 : Montrer que si l'on connaît un élément u_0 de $H^1(\Omega)$ tel que

$$\gamma_0(u_0) = V_i \quad \text{sur } \partial C_i\,,\ i = 0..2\,,$$

le problème (1)–(2) est équivalent à :

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} &\text{Trouver v} \in H_0^1\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}X = -\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla w \,\mathrm{d}X \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)\,, \end{aligned}$$

où $V = v + u_0$. Montrer que ce problème admet une unique solution.

Pour résoudre numériquement le problème (1)–(2), on choisit une approximation du problème (3) de type élément fini P_1. Pour mailler l'ouvert Ω, on utilisera le logiciel EMC2 (voir l'annexe). On appelle h le pas du maillage ainsi généré.

Soient $(M_i)_{1\leq i\leq N+N_b}$ les sommets du maillage, ordonnés de telle sorte que $(M_i)_{1\leq i\leq N}$ appartient à Ω et $(M_i)_{N+1\leq i\leq N+N_b}$ se trouve sur $\partial\Omega$. Pour chaque sommet M_i, $i = 1..N + N_b$, on note w_i la fonction de base associée.

Question 3 : On approche V par V_h, avec

$$V_h(x,y) = \sum_{i=1}^{N+N_b} V_i\, w_i(x,y)\,.$$

Par définition, que vaut V_i ? On procède de même pour tout élément de $H^1(\Omega)$. Quelle approximation $u_{0,h}$ prendre pour u_0 ?

Question 4 : Soit v_h l'approximation de v dans $H_0^1(\Omega)$ de la forme

$$v_h(x,y) = \sum_{i=1}^{N+N_b} v_i w_i(x,y)\,.$$

Que valent $(v_i)_{N+1\leq i\leq N+N_b}$? Montrer que le problème discret associé à (3) est

$$\text{(4)}\qquad \int_\Omega \nabla v_h \cdot \nabla w_i \,\mathrm{d}X = -\int_\Omega \nabla u_{0,h} \cdot \nabla w_i \,\mathrm{d}X\,,\quad i = 1..N\,.$$

Question 5 : En reprenant la question précédente, montrer que le vecteur $\boldsymbol{v}$ de composantes $(v_i)_{1\leq i\leq N+N_b}$ est solution de

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \tag{5}$$

avec $\boldsymbol{K}$ une matrice carrée de taille $(N+N_b)\times(N+N_b)$, dont les éléments $(k_{ij})_{1\leq i,j\leq N+N_b}$ sont de la forme

$$\begin{cases} k_{ij} = \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_i \,\mathrm{d}X & \text{si } 1\leq i,j\leq N\,, \\ k_{ij} = \delta_{ij} & \text{si } i\geq N+1 \text{ ou } j\geq N+1\,, \end{cases}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker et $\boldsymbol{f}$ est un vecteur à $N+N_b$ composantes de la forme

$$\begin{cases} f_i = -\int_\Omega \nabla u_{0,h} \cdot \nabla w_i \,\mathrm{d}X & \text{si } 1\leq i\leq N\,, \\ f_i = 0 & \text{si } i\geq N+1\,. \end{cases}$$

Question 6 : Montrer que $\boldsymbol{K}$ est une matrice symétrique et définie positive, *i.e.*

$$(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+N_b}\,.$$

Question 7 : Comparer la procédure de construction de $\boldsymbol{K}$ à la méthode d'élimination des conditions essentielles du cours, pages 165 et suivantes.

3 Résolution

Question 8 : Programmer la résolution de (5) préférentiellement en FORTRAN ou MATLAB, grâce à la factorisation de Cholesky de $\boldsymbol{K}$.
Construire

$$V_h = v_h + u_{0,h}\,.$$

Question 9 : Ecrire une procédure qui permet de calculer le pas h du maillage. On rappelle que pour un triangle T_l, on note h_l le diamètre du plus petit cercle circonscrit. On définit alors $h = \max\limits_l h_l$, où le maximum est pris sur l'ensemble des triangles $(T_l)_l$ du maillage.

Dans cette partie, on va également résoudre (5) à l'aide de l'algorithme du gradient conjugué, ce qui permettra de vérifier la validité de la factorisation de Cholesky programmée par vos soins. L'algorithme est :

$$\boldsymbol{v}_0 = 0,\ \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{r}_0\,.$$

Pour $k = 1,2,..$jusqu'à $\|\boldsymbol{r}_k\| \leq \epsilon\|\boldsymbol{r}_0\|$:

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{r}_{k-1},\boldsymbol{r}_{k-1})}{(\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}_{k-1},\boldsymbol{p}_{k-1})}\,,\ \beta_k = \frac{(\boldsymbol{r}_k,\boldsymbol{r}_k)}{(\boldsymbol{r}_{k-1},\boldsymbol{r}_{k-1})}\,,$$
$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1} + \alpha_k\boldsymbol{p}_{k-1}\,, \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_{k-1} - \alpha_k\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}_{k-1}\,, \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{r}_k + \beta_k\boldsymbol{p}_{k-1}\,.$$

Question 10 : Programmer l'algorithme ci-dessus, avec $\epsilon = 10^{-4}$. Comparer la solution $V_h = v_h + u_{0,h}$ obtenue ici à celle de la question 8. Faire varier[1] le pas du maillage h et étudier l'évolution du nombre d'itérations N_{it} à la convergence en fonction de h. Déterminer numériquement $m > 0$ tel que

$$N_{it} h^m \sim cst.$$

4 Résolution 2

On va pour finir, résoudre (5) grâce à l'algorithme du gradient conjugué préconditionné. Pour construire un préconditionnement, noté $\boldsymbol{M}$, de $\boldsymbol{K}$, on va partitionner l'ensemble des sommets du maillage intérieurs à Ω, $S = \{M_i\ ,\ i = 1..N\}$, en p sous-ensembles. On note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i et $\mu_i = F(x_i, y_i)$: par exemple $F(x,y) = x$, $F(x,y) = x^2 + y^2$, $\cdots$.
Pour découper S en S_1 et S_2, de même cardinal à un près, on détermine la valeur médiane des $(\mu_i)_{1 \le i \le N}$, notée μ_m, et on affecte M_i à S_1 si $\mu_i \le \mu_m$, et à S_2 sinon. Pour découper S en quatre, on découpe S_1 et S_2 en deux sous-ensembles chacun, et ainsi de suite. Après J étapes, on obtient 2^J sous-ensembles de S de cardinaux presqu'identiques (à chaque étape, on peut retenir un critère $F(x,y)$ différent).

Question 11 : Pour déterminer μ_m, proposez un algorithme de votre choix.

Question 12 : Ecrire le programme informatique qui réalise automatiquement le découpage, en incluant la possibilité de visualiser les sous-ensembles $(S_l)_{1 \le l \le L}$ ainsi construits.

Dans la suite prendre $F(x,y) = y$ pour découper S en deux, puis $F(x,y) = x$ pour obtenir quatre sous-ensembles, et de nouveau $F(x,y) = y$ pour arriver à huit sous-ensembles.

Une fois cette construction réalisée, on a

$$\{M_1, M_2, .., M_N, M_{N+1}, .., M_{N+N_b}\} = \bigcup_{l=1..L+1} S_l$$

avec $S_{L+1} = \{M_{N+1}, .., M_{N+N_b}\}$. $\boldsymbol{M}$ est choisit comme suit : si on appelle $(m_{ij})_{1 \le i,j \le N+N_b}$ ses éléments, on prend

$$\begin{cases} m_{ij} = k_{ij} & \text{si } M_i \text{ et } M_j \text{ appartiennent à un même sous-ensemble } S_l, \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[1] Pour cela, il suffit de construire plusieurs maillages en faisant varier le nombre de triangles. En particulier, il vous est demandé de construire un maillage composé d'au moins 1000 triangles.

Question 13 : Prouver que $\boldsymbol{M}$ est une matrice symétrique définie positive.

Question 14 : Montrer que $\boldsymbol{M}$ est diagonale par blocs. Quel est l'avantage lorsque, $\boldsymbol{g}$ étant donné, on veut calculer la solution $\boldsymbol{y}$ de

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g} \text{ ?} \tag{6}$$

Programmer la résolution de (6).

Pour finir, on résout (5) à l'aide de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné, où $\boldsymbol{M}$ est le préconditionnement de $\boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{v}_0 = 0,\ \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{M^{-}1}\boldsymbol{r}_0\,.$$

Pour $k = 1, 2, ..$jusqu'à $\|\boldsymbol{r}_k\| \leq \epsilon\|\boldsymbol{r}_0\|$:

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{M^{-}1}\boldsymbol{r}_{k-1}, \boldsymbol{r}_{k-1})}{(\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{p}_{k-1})}\,,\ \beta_k = \frac{(\boldsymbol{M^{-}1}\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)}{(\boldsymbol{M^{-}1}\boldsymbol{r}_{k-1}, \boldsymbol{r}_{k-1})}\,,$$
$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1} + \alpha_k\boldsymbol{p}_{k-1}\,, \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_{k-1} - \alpha_k\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}_{k-1}\,, \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{M^{-}1}\boldsymbol{r}_k + \beta_k\boldsymbol{p}_{k-1}\,.$$

Question 15 : A quelle valeur de la matrice $\boldsymbol{M}$ correspond l'algorithme du gradient conjugué de la partie intitulée “Résolution 1” ?

Question 16 : Programmer l'algorithme ci-dessus, avec $\epsilon = 10^{-4}$. Comparer la solution $V_h = v_h + u_{0,h}$ ainsi obtenue à celles des questions 8 et 10. Faire varier le pas du maillage et étudier l'évolution du nombre d'itérations N'_{it} à la convergence en fonction de h. Déterminer numériquement $m' > 0$ tel que

$$N'_{it}h^{m'} \sim cst\,.$$

Annexe

Pour mailler l'ouvert, on utilise le logiciel EMC2, installé sur le réseau. En sortie, le mailleur fournit un fichier contenant :

- Le nombre de triangles et le nombre de sommets.
- La liste des coordonnées des sommets, ainsi qu'un indice de référence pour chaque sommet.
- La liste des numéros des sommets de chaque triangle, ainsi qu'un indice de référence pour chaque triangle.

A l'aide de la référence propre aux sommets situés sur la frontière, on peut également obtenir

- Le nombre de ces sommets frontière.
- Les numéros de ces sommets frontière.

Une notice d'utilisation est disponible en ligne à l'adresse suivante :
http ://pauillac.inria.fr/cdrom/ftp/emc2/