PROJET MA201
Un problème singulier*

François LORET[†]

1 Introduction

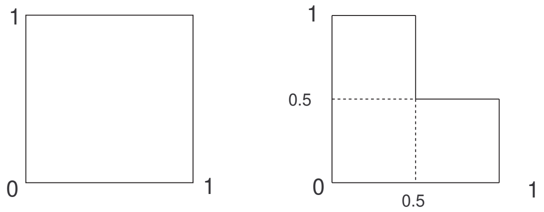
Dans le cours MA201, le domaine de calcul est supposé être “régulier” ou convexe. Que se passe-t-il si tel n'est pas le cas ? Pour répondre en partie à cette question, nous allons étudier le problème suivant :

Trouver u tel que

(1) $$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega\,,$$

(2) $$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,,$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω. Dans un domaine Ω qui est soit un carré, soit en forme de L.



Question 1 : Que pensez-vous du problème (1)–(2) ?

Question 2 : Si maintenant on demande que la solution u soit un élément de $H^1(\Omega)$, quelle est la solution de (1)–(2) ?

Dans la suite, on va affaiblir cette hypothèse et supposer que u est simplement dans $L^2(\Omega)$ pour résoudre (1)–(2). Pour cela, on va utiliser le résultat suivant :
*Lorsque u est **harmonique** dans un ouvert V, i.e., telle que $\Delta u = 0$ dans V, alors u est **localement** de classe C^∞ en tout point de cet ouvert.*

*__Reprise d'un sujet de P. Ciarlet.__

†Laboratoire de Simulation et Modélisation des phénomènes de Propagation, S.M.P., loret@ensta.fr, bureau 3053).

Il est bon de noter que l'hypothèse : $u \in L^2(\Omega)$, est **globale**. Le résultat précédent permet de définir la valeur de u, ainsi que la valeur de ses dérivées, en tout point. Peut-on faire mieux ?

2 Extension de la régularité de u jusqu'au bord

Un peu de théorie des distributions. On va prendre l'arête de $\partial\Omega$ incluse dans l'axe des x. Considèrons $0 < a < b < 1$, et $0 < c < 1/2$. Alors $w =]a, b[\times]0, c[$ est inclus dans Ω, et $\partial\Omega_0 = \{(x, 0)\,;\, a \leq x \leq b\} = \partial w \cap \partial\Omega$. On appelle w' l'ouvert symétrique de w par rapport à l'axe Ox, soit $w' =]a, b[\times] - c, 0[$.
D'après (1) et (2), on a

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{dans } w\,, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial w_0\,. \end{aligned}$$

Soit $\tilde{w} =]a, b[\times] - c, c[$ et $\tilde{u}$ définie presque partout dans $\tilde{w}$ par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x, y) & \text{si } y > 0, \\ -u(x, -y) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

L'objet de ce paragraphe est de vérifier que

$$(3) \qquad \Delta\tilde{u} = 0 \quad \text{dans } \tilde{w}\,.$$

Grâce au résultat ci-dessus, on pourra alors dire que $\tilde{u}$ est de classe C^∞ dans $\tilde{w}$, et par voie de conséquence, sur les arêtes du bord $\partial\Omega$, sommets **exclus**.

Question 3 : Montrer que $\Delta\tilde{u}(x, y) = -\Delta u(x, -y)$, $\forall (x, y) \in w'$. Conclusion ?

Il reste le cas de l'interface entre w et w', ∂w_0, à traiter. Soit $\mathcal{D}(\tilde{w})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $\tilde{w}$: on sait que (3) équivaut à

$$(4) \qquad \langle \Delta\tilde{u}, \tilde{\phi} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\tilde{w})\,.$$

On rappelle qu'au sens des distributions,

$$\langle \partial_x \tilde{T}, \tilde{\phi} \rangle = -\langle \tilde{T}, \partial_x \tilde{\phi} \rangle\,, \text{et } \langle \partial_y \tilde{T}, \tilde{\phi} \rangle = -\langle \tilde{T}, \partial_y \tilde{\phi} \rangle\,.$$

Question 4 : A partir de la définition de l'opérateur laplacien Δ, montrer que

$$\langle \Delta\tilde{u}, \tilde{\phi} \rangle = \langle \tilde{u}, \Delta\tilde{\phi} \rangle \quad \forall \tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\tilde{w})\,.$$

Par construction, $\tilde{u} \in L^2(\tilde{w})$. En conséquence

$$\langle \Delta\tilde{u}, \tilde{\phi}\rangle = \int_w u\Delta\tilde{\phi}\,\mathrm{d}X + \int_{w'} \tilde{u}\Delta\tilde{\phi}\,\mathrm{d}X\,.$$

Question 5 : En procédant à une double intégration par parties, pour chacune des deux intégrales, vérifier que

$$\langle \Delta\tilde{u}, \tilde{\phi}\rangle = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\tilde{w})\,.$$

Conclusion ?

3 Comportement de u aux sommets

On sait maintenant que u est régulière jusqu'au bord, sommets exclus. Admettant que l'on peut écrire, au voisinage d'un sommet S de $\partial\Omega$

$$u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A_m r^{\beta_m} f_m(\theta)\,, \tag{5}$$

où les coordonnées (r,θ) sont les coordonnées polaires locales d'origine le sommet S en question. Si θ_0 est l'angle au sommet en S, on choisit $R > 0$ tel que le secteur angulaire $S(R,\theta_0) = \{(r,\theta) \in]0,R[\times]0,\theta_0[\}$ est inclus dans Ω.
Dans ce paragraphe, nous allons déterminer β_m, $f_m(\cdot)$, ainsi que les valeurs possibles de m. En coordonnées polaires, on rappelle que

$$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u\,.$$

Question 6 : En posant $u_m = r^{\beta_m} f_m(\theta)$, pour m donné, déterminer r^{β_m} et $f_m(\cdot)$ tels que $\Delta u_m = 0$ dans $S(R,\theta_0)$, $u_m(\cdot\,,0) = 0$, $u_m(\cdot\,,\theta_0) = 0$.

Question 7 : Vérifier que $\int_0^{\theta_0} f_m(\theta)f_p(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$ lorsque $|m| \neq |p|$. Que se passe-t-il si $|m| = |p|$?

On en déduit formellement que

$$\begin{aligned}\int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\theta_0} u^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \quad &= \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} {A_m}^2 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\theta_0} u_m^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &+ \quad \sum_{m\in\mathbb{N}^*} A_m A_{-m} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\theta_0} u_m u_{-m} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Comme $u \in L^2(S(R,\theta_0))$, le terme de gauche est fini.

Question 8 : Montrer que $u_m \in L^2(S(R,\theta_0))$ si et seulement si $\beta_m > -1$.
De même, on prouve que $u_m \in H^1(S(R,\theta_0))$ si et seulement si $\beta > 0$.

Question 9 : Dans le cas qui nous intéresse, $\theta_0 = \pi/2$ ou $3\pi/2$. Pour ces deux valeurs de θ_0, quelles sont les valeurs de m qui induisent $\beta_m > -1$, $\beta_m > 0$? Montrer que

$$\text{si } \theta_0 = 3\pi/2\,, \quad u = \sum_{m\geq -1} A_m r^{\frac{2}{3}m} \sin(\frac{2}{3}m\theta)\,, \tag{7}$$

$$\text{si } \theta_0 = \pi/2\,, \quad u = \sum_{m\geq +1} A_m r^{2m} \sin(2m\theta)\,.$$

Que devient (6) ? Que peut-on en déduire sur la décroissance des coefficients $(A_m)_m$ lorsque $m \to \infty$?

On admet que si chacun des u_m appartient à $H^1(S(R,\theta_0))$, alors u se trouve aussi dans $H^1(S(R,\theta_0))$ (ceci peut se prouver à l'aide de la décroissance des coefficients A_m).

Question 10 : Quelle est la solution $u \in L^2(\Omega)$ au problème (1)–(2) dans le cas du carré ?

Dans le cas du L, on prouve que les solutions u de (1)–(2) appartenant à $L^2(\Omega)$, forment un espace vectoriel de dimension 1. Dans la suite, nous allons calculer numériquement un des représentants. Soit $S_*(R,3\pi/2)$ le secteur angulaire de sommet S de coordonnées $(0.5,0.5)$ d'angle au sommet $3\pi/2$ inclus dans Ω.

4 Cas du L : formulation variationnelle du problème extérieur

Dans cette partie, on va déterminer le problème vérifié par u^- la restriction de u à $\Omega^- := \Omega \setminus \overline{S_*(R,3\pi/2)}$.

Question 11 : A l'aide de (7), montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{4}{3\pi} R^{-\frac{2}{3}} \int_{\theta=0}^{3\pi/2} u(R,\theta)\sin(\frac{2}{3}\theta)\mathrm{d}\theta + R^{-\frac{4}{3}} A_{-1}\,. \\ \\ A_m = \frac{4}{3\pi} R^{-\frac{2}{3}m} \int_{\theta=0}^{3\pi/2} u(R,\theta)\sin(\frac{2}{3}m\theta)\mathrm{d}\theta \ \ \forall m \geq 2\,. \end{array} \right. \tag{8}$$

Soit maintenant $\boldsymbol{n}_0$ le vecteur normal unitaire à l'arc de cercle ∂S_* de rayon

R, d'angle au sommet S, dirigé vers l'extérieur de $S_*(R, 3\pi/2)$. On peut alors en déduire

$$
\begin{aligned}
\partial_{\boldsymbol{n}_0} u(R,\theta) &= \frac{8/9}{\pi R} \sum_{m\geq 1} m \left\{ \int_{\theta'=0}^{3\pi/2} u(R,\theta') \sin(\frac{2}{3} m\theta') \mathrm{d}\theta' \right\} \sin(\frac{2}{3} m\theta) \\
&+ \frac{4A_{-1}}{3R^{\frac{5}{3}}} \sin(\frac{2}{3}\theta) \quad \theta \in]0, \frac{3\pi}{2}[\,. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

On écrit le second membre de (9) sous la forme

$$
T(u(R,\cdot)) = T_1(u(R,\cdot)) + \frac{4A_{-1}}{3R^{\frac{5}{3}}} \sin(\frac{2}{3}\theta)\,.
$$

La restriction u^- de u vérifie

$$
\begin{aligned}
&\Delta u^- = 0 \quad \text{dans } \Omega^-\,, && (10)\\
&u^- = 0 \quad \text{sur } \Gamma := \partial\Omega \cap \partial\Omega^-\,, && (11)\\
&-\partial_{\boldsymbol{n}_0} u + T(u^-) = 0 \quad \text{sur } \partial S_*\,. && (12)
\end{aligned}
$$

Noter que $\boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{n}_0$. De plus, on sait d'après les paragraphes §2 et §3 que u est au moins de régularité H^1 hors de $S_*(R, 3\pi/2)$. Par conséquent, $u^- \in H^1(\Omega^-)$. On peut donc résoudre (10)–(12) par une formulation variationnelle classique, dans $H^1(\Omega^-)$.

Question 12 : Soit $H^1_\Gamma(\Omega^-) := \{v \in H^1(\Omega^-)\,;\, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$. Montrer que la formulation variationnelle équivallente à (10)–(12), pour u^- de régularité H^1, est

$$
\begin{aligned}
&\text{Trouver } u^- \in H^1_\Gamma(\Omega^-) \text{ telle que}\\
&\int_{\Omega^-} \nabla u^- \cdot \nabla v \,\mathrm{d}X + R \int_{\theta=0}^{3\pi/2} T_1(u^-)(R,\theta)\, v(R,\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{4A_{-1}}{3R^{\frac{2}{3}}} \int_{\theta=0}^{3\pi/2} \sin(\frac{2}{3}\theta)\, v(R,\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \forall v \in H^1_\Gamma(\Omega^-)\,. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Question 13 : Sachant que $\int_{\theta=0}^{3\pi/2} T_1(v)(R,\theta)\, v(R,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est positif ou nul pour tout v appartenant à $H^1_\Gamma(\Omega^-)$, montrer à l'aide du théorème de Lax-Milgram que (13) admet une unique solution.

5 Traitement numérique

On fixe $A_{-1} = 1$ dans ce paragraphe. Pour finir, on va approcher (13) grâce aux éléments finis de type P_1. Pour mailler l'ouvert Ω^-, on s'aide du logiciel EMC2 (voir annexe). Vous prendrez 10 points de discrétisation sur

l'arc de cercle ∂S_*. On appelle h le pas du maillage ainsi généré.
On approche "grossièrement" T_1 par

$$T_1^h(v^h) = 0\,,\ \text{ou}$$
$$T_1^h(v^h) = \frac{8/9}{\pi R}\sum_{m=1}^{5} m\left\{\int_{\theta'=0}^{3\pi/2} u(R,\theta')\sin(\frac{2}{3}m\theta')\mathrm{d}\theta'\right\}\sin(\frac{2}{3}m\theta)\,.$$

On commence par le cas $T_1^h(v^h) = 0$.

Question 14 : A l'aide du cours, écrire le système linéaire à résoudre sous la forme

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}\,.$$

Expliciter $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{f}$. Pour calculer $\boldsymbol{f}$, quelle approximation "géométrique" peut-on faire, en rapport avec l'arc de cercle ∂S_* ? Pour rendre les calculs plus aisés, vous retiendrez cette approximation lors de la programmation.

Question 15 : Eliminer, en suivant la procédure établie dans le cours, la condition de Dirichlet homogène pour les noeuds qui se trouvent sur Γ. On arrive ainsi au système équivalent suivant

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}'\,. \tag{14}$$

Ecrire le couple $(\boldsymbol{K}', \boldsymbol{f}')$ en fonction de $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{f})$.

Question 16 : Programmer la résolution de (14), préférentiellement en FORTRAN ou MATLAB, grâce à la factorisation de Cholesky de $\boldsymbol{K}'$.

Question 17 : Quel(s) moyen(s) utiliser pour vérifier la validité du programme ?

On passe pour finir au cas

$$T_1^h(v^h) = \frac{8/9}{\pi R}\sum_{m=1}^{5} m\left\{\int_{\theta'=0}^{3\pi/2} u(R,\theta')\sin(\frac{2}{3}m\theta')\mathrm{d}\theta'\right\}\sin(\frac{2}{3}m\theta)\,.$$

Pour calculer la quantité ci-dessus simplement, étendre l'approximation "géométrique" de la question 14 au calcul numérique effectif de $T_1^h(v^h)$.

Question 18 : En déduire une expression explicite de $T_1^h(w_i^h)$, où w_i^h est la fonction de base associée au noeud i.

Question 19 : Reprendre les questions 14 à 17 dans ce cas.

Question 20 : A l'aide de (8), calculer une approximation de A_1, A_2, A_3, A_4, et A_5. Conclusion ?

Annexe

Pour mailler l'ouvert, on utilise le logiciel EMC2, installé sur le réseau. En sortie, le mailleur fournit un fichier contenant :

- Le nombre de triangles et le nombre de sommets.

- La liste des coordonnées des sommets, ainsi qu'un indice de référence pour chaque sommet.

- La liste des numéros des sommets de chaque triangle, ainsi qu'un indice de référence pour chaque triangle.

A l'aide de la référence propre aux sommets situés sur la frontière, on peut également obtenir

- Le nombre de ces sommets frontière.

- Les numéros de ces sommets frontière.

Une notice d'utilisation est disponible en ligne à l'adresse suivante :
http ://pauillac.inria.fr/cdrom/ftp/emc2/